

# Suppeneva geometrinen sarja

Geometrinen *sarja*  $a + aq + aq^2 + \dots$  suppenee jos ja vain jos  $-1 < q < 1$ .  
Sarjan summa on tällöin

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

**Esimerkki:**

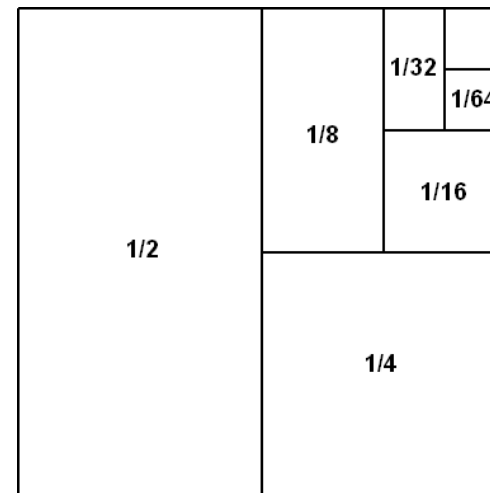
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Kyseessä on geometrinen sarja, jonka ensimmäinen termi  $a = 1$  ja suhdeluku  $q = \frac{1}{2}$ .

$$\text{Sarjan summa on } S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Vastaavan lukujonon  $n$ :n  
ensimmäisen jäsenen summa:

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \rightarrow 0, \text{ kun } n \rightarrow \infty$$



## Esimerkki:

Laske  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^n$ . Päätymätön summa on geometrinen sarja, kun  $x \neq 0$ .

Sarjan ensimmäinen termi  $a = 1$  ja suhdeluku  $q = \frac{x+1}{x}$ .

Sarja suppenee kun  $|q| < 1$ :

Huom! Jos  $x = -1$ , niin ensimmäinen termi on muotoa  $0^0$ , jota ei ole määritelty. Sovitaan kuitenkin tällaista summamerkintää käytettäessä, että ensimmäinen termi on 1.

$$\left| \frac{x+1}{x} \right| < 1 \quad ( )^2 \quad (\text{molemmat puolet} \geq 0)$$

$$\left( \frac{x+1}{x} \right)^2 < 1^2$$

$$\frac{(x+1)^2}{x^2} < 1 \quad \cdot x^2 (> 0)$$

$$(x+1)^2 < x^2$$

$$x^2 + 2x + 1 < x^2$$

$$2x < -1$$

$$x < -\frac{1}{2}$$

Kun sarja suppenee, sen summa on

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{x+1}{x}} = \frac{1}{\frac{x}{x} - \frac{x+1}{x}}$$

$$a = 1, q = \frac{x+1}{x}$$

$$S = \frac{x}{x - (x+1)} = \frac{x}{-1} = -x$$

Vastaus: Sarja suppenee kun  $x < -\frac{1}{2}$  ja sen summa on tällöin  $-x$ .